KALKULUS DIFERENSIAL

- *Ringkasan Materi*
- *Contoh Soal dan Pembahasan*
- *Latihan Terbimbing*
- *Kumpulan Soal*

Diterbitkan atas bantuan penulisan buku
LPPM IAIN Padangsidimpuan tahun 2021

KALKULUS DIFERENSIAL

Dr. Suparni, S.Si., M.Pd.

KENCANA

KALKULUS DIFERENSIAL

Edisi Pertama

ISBN 978-623-384-021-7
14 x 20.5 cm
xiv, 100 hlm
Cetakan ke-1, November 2021

Kencana. 2021.1551

Penulis
Dr. Suparni, S.Si., M.Pd.

Diterbitkan oleh Kencana
Bekerja sama dengan IAIN Padangsidimpuan Press

Desain Sampul
Irfan Fahmi

Penata Letak
Endang Wahyudin
& Arshinta Tifiri

Penerbit
KENCANA
Jl. Tambra Raya No. 23 Rawamangun - Jakarta 13220
Telp: (021) 478-64657 Faks: (021) 475-4134

Divisi dari PRENADAMEDIA GROUP
e-mail: pmg@prenadamedia.com
www.prenadamedia.com
INDONESIA

SAMBUTAN
Rektor IAIN Padangsidimpuan

Bismillahirrahmanirrahim.

Puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya akhirnya penerbitan buku ajar dan buku referensi di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dengan menggunakan anggaran tahun 2021 ini bisa diwujudkan. Hal ini bisa terlaksana berkat kerja sama pihak LPPM dengan para dosen dalam rangka menerbitkan buku-buku dosen IAIN Padangsidimpuan, baik itu berupa buku ajar, buku referensi, maupun buku bacaan.

Apresiasi yang tinggi untuk semua dosen yang telah menyumbangkan karya pikirnya bagi kemajuan dunia pendidikan dan kemajuan dunia ilmiah di IAIN Padangsidimpuan. Keberadaan buku ini diharapkan dapat menjadi informasi bagi para akademisi dan menjadi bahan bacaan bagi mahasiswa terhadap berbagai ranah keilmuan. Selain itu juga diharapkan dapat menjadi bahan ajar bagi pada dosen dalam mengampu dan mengemban matakuliah yang dibebankan.

Penerbitan buku-buku karya dosen-dosen di lingkungan IAIN Padangsidimpuan dilakukan melalui kerja sama antara IAIN Padangsidimpuan Press dan Penerbit Prenada. Dengan adanya kerja sama yang dibangun melalui LPPM IAIN Padangsidimpuan, diharapkan penerbitan buku ini akan terus berlangsung setiap tahunnya. Terima kasih kepada LPPM yang telah melakukan gebrakan untuk kemajuan IAIN Padangsidimpuan melalui karya-karya ilmiah pada dosen.

Demikian disampaikan, besar harapan akan munculnya karya-karya dosen lainnya di IAIN Padangsidimpuan.

Rektor IAIN Padangsidimpuan

Prof. Dr. H. Ibrahim Siregar, MCL.

KATA PENGANTAR
Ketua LPPM IAIN Padangsidimpuan

Bismillahirrahmanirrahim.

Puji dan syukur dihadirkan kepada Allah swt., berkat rahmat dan hidayah-Nya penerbitan buku di lingkungan IAIN Padangsidimpuan akhirnya menjadi kenyataan. Tahun 2021 ini ada 16 judul buku yang diterbitkan dengan kerja sama IAIN Padangsidimpuan Press dan PrenadaMedia Grup, buku ini adalah salah satunya.

Ucapan terima kasih kepada penulis yang telah mendukung program LPPM dengan mengirimkan naskah terbaik yang dimilikinya. Tanpa kontribusi dari para dosen kegiatan ini tidak akan terlaksana. Terima kasih juga disampaikan kepada Pusat Penelitian dan Penerbitan yang telah memotivasi dan terus menggenjot para dosen untuk mengirimkan naskahnya, hingga akhirnya buku ini hadir di hadapan para pembaca. Keberadaan buku-buku ini hendaknya membawa manfaat yang signifikan, tidak saja bagi para dosen, tetapi juga para mahasiswa, yakni dengan tersedianya sumber belajar yang sesuai dengan keilmuan yang mereka tekuni.

Demikian disampaikan, semoga bisa tetap berkarya.

Ketua LPPM IAIN Padangsidimpuan

Dr. H. Zul Anwar Ajim Harahap, M.A.

KATA PENGANTAR PENULIS

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga buku yang berisikan: ringkasan materi, pembahasan soal-soal, dan kumpulan soal latihan terbimbing ini dapat diselesaikan. Buku ini disusun dan dirancang berdasarkan pengalaman penulis setelah beberapa kali membawakan/mengajarkan matakuliah Kalkulus Diferensial pada semester III di tahun-tahun sebelumnya.

Padatnya materi dirasakan penulis tidak sebanding dengan jumlah waktu/SKS yang ditetapkan untuk matakuliah ini. Juga seperti yang penulis lihat dan alami di dalam kelas bahwa kemampuan dasar matematika para mahasiswa pada semester awal ini sangatlah bervariasi. Perbedaan ini tentunya akibat jumlah jam belajar matematika mereka yang tidak sama ketika di sekolah sebelumnya. Latar belakang sekolah mereka adalah Pesantren, MAN, SMK, SMEA, dan SMA. Melalui pemakaian buku ini ketika PBM berlangsung diharapkan akan dapat mempermudah mahasiswa dalam memahami materi-materi yang ada di dalamnya.

Isi buku ini merupakan ringkasan materi ajar matakuliah kalkulus diferensial, dan pada setiap akhir sub materi selalu dilengkapi dengan beberapa pembahasan soal, kemudian diberikan soal latihan terbimbing untuk dikerjakan mahasiswa secara bersama pada saat proses pembelajaran berlangsung atau pada saat diskusi kelompok atau sebagai pekerjaan di rumah, lalu pada bagian akhir bab diberikan kumpulan soal-soal yang dapat dikerjakan sebagai latihan di rumah.

Penulisan buku ini bertujuan untuk meningkatkan pengetahuan, pemahaman, dan keterampilan mahasiswa secara merata dalam memahami setiap materi yang terdapat dalam kurikulum matakuliah Kalkulus Diferensial. Penyusunan buku ini dilakukan dengan merujuk pada kurikulum yang ada dan memperhatikan beberapa buku pegangan yang telah ditentukan.

Dengan selesainya penyusunan buku ini, diharapkan mahasiswa mendapatkan wawasan yang cukup tentang seluruh materi ajar matakuliah Kalkulus Diferensial. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa program studi Tadris/ Pendidikan Matematika IAIN Padangsidimpuan khususnya mahasiswa yang belajar matakuliah ini.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih belum sempurna sebagaimana mestinya. Oleh karenanya, kritik dan saran dari semua komponen dengan tujuan kesempurnaan buku ini sangatlah diharapkan. Kritik dan saran akan diterima dengan senang hati dan rasa terima kasih yang tulus. Akhirnya semoga Allah Swt. Selalu melindungi kita semua.

Terima kasih.

Padangsidimpuan, Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

1.1

SISTEM BILANGAN RIIL DAN KETAKSAMAAN

Materi Pokok:	**1.1.1 Sistem Bilangan Riil**
	1.1.2 Ketaksamaan

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menyebutkan jenis-jenis bilangan.
2. Membuat diagram/pohon bilangan.
3. Menggunakan operasi hitung pada bilangan riil.
4. Membedakan selang terbuka dengan selang tertutup.
5. Menyelesaikan ketaksamaan.

1.1.1 SISTEM BILANGAN RIIL

Jenis-jenis Bilangan

1. Bilangan asli: 1, 2, 3, ...
   Himpunan bilangan asli dilambangkan dengan **N**.
2. Bilangan prima: 2, 3, 5, 7, ...
   Bilangan prima adalah bilangan asli yang mempunyai tepat 2 faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri.

3. Bilangan komposit: 4, 6, 8, 9, ...
   Bilangan komposit adalah bilangan asli yang mempunyai lebih dari 2 faktor.
4. Bilangan cacah: 0, 1, 2, 3, ...
   Bilangan cacah adalah bilangan asli beserta unsur nol.
5. Bilangan bulat: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
   Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan **Z**.
6. Bilangan genap: ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...
   Bilangan genap adalah bilangan bulat kelipatan dua, ditulis dengan lambang 2k di mana k adalah bilangan bulat.
7. Bilangan ganjil: ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...
   Bilangan ganjil adalah bilangan bulat bukan kelipatan dua, ditulis dengan lambang 2k + 1 atau 2k – 1 di mana k adalah bilangan bulat.
8. Bilangan pecahan adalah bilangan berbentuk $x = \frac{m}{n}$, di mana m dan n adalah bilangan bulat dengan m tidak habis dibagi n. Bilangan pecahan antara 0 dan 1 disebut pecahan sejati
9. Bilangan rasional adalah bilangan berbentuk $x = \frac{m}{n}$,dimana m dan n adalah bilangan bulat. Jika m habis dibagi n maka x adalah bilangan bulat. Jika m tidak habis dibagi n maka x adalah bilangan pecahan. Bilangan rasional selalu berbentuk desimal berulang.

   Contoh:

   $$\frac{1}{2} = 0{,}5000...;$$
   $$\frac{7}{11} = 0{,}636363...;$$
   $$\frac{2}{3} = 0{,}66666...;$$
   $$\frac{28}{11} = 2{,}545454...$$

Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan Q.

10. Bilangan irasional adalah bilangan yang bukan rasional.

    Contoh:

    $\sqrt{2} = 1{,}414213562......;\ \sqrt{3};\ \pi.$

11. Bilangan riil adalah gabungan bilangan rasional dan irasional. Himpunan bilangan riil dilambangkan dengan **R**.
12. Bilangan imajiner adalah bilangan yang bukan riil.

    Contoh: $\sqrt{-2}$

13. Bilangan kompleks adalah gabungan bilangan riil dan imajiner.

    Contoh: $2 + 3\sqrt{-2}$.

Sifat-sifat yang Berlaku pada Bilangan Riil

1. Hukum komutatif $x + y = y + x$ dan $xy = yx$
2. Hukum assosiatif $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$
3. Hukum distributif $x(y + z) = xy + xz$
4. Unsur identitas/kesatuan

   Terdapat unsur 0 (unsur kesatuan tambah) dan 1 (unsur kesatuan kali) yang memenuhi $x + 0 = x$ dan $x \cdot 1 = x$
5. Unsur balikan (invers).

   Untuk setiap x

   Setiap bilangan x mempunyai balikan aditif $-x$ yang memenuhi $x + (-x) = 0$. Setiap bilangan x kecuali 0 mempunyai balikan perkalian x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Sederhanakanlah $4 + \dfrac{3}{2 + \frac{5}{2}}$

Jawab:

$$4+\frac{3}{2+{}^{5}\!/_{2}}=\ldots\ldots+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\frac{\ldots\ldots}{2}+\frac{\ldots\ldots}{2}}=\ldots\ldots+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\frac{\ldots\ldots}{2}}=\ldots\ldots+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\times\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}=\ldots\ldots+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}+\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

Soal 2

Sederhanakanlah $(3t-1)^3$

Jawab:

$$\begin{aligned}(3t-1)^3 &= (\ldots\ldots - \ldots\ldots)\,(\ldots\ldots - \ldots\ldots)\,(\ldots\ldots - \ldots\ldots)\\ &= (\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots)\,(\ldots\ldots - \ldots\ldots)\\ &= (\ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots)\,(\ldots\ldots - \ldots\ldots)\\ &= \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Soal 3

Sederhanakanlah $\dfrac{2}{4y-2}+\dfrac{y}{9y^2-1}-\dfrac{2y+1}{1-3y}$

Jawab:

$$\frac{2}{4y-2}+\frac{y}{9y^2-1}-\frac{2y+1}{1-3y}$$

$$=\frac{\ldots\ldots}{2(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}+\frac{\ldots\ldots}{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}-\frac{\ldots\ldots}{(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}$$

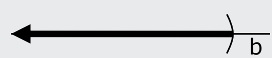
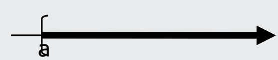
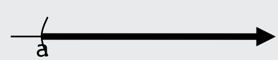
$$=\frac{\ldots\ldots(\ldots\ldots+\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}+\frac{\ldots\ldots}{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}-\frac{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots+\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}$$

$$=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(\ldots\ldots+\ldots\ldots)(\ldots\ldots-\ldots\ldots)}$$

$$=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

1.1.2 KETAKSAMAAN

Ketaksamaan ganda $a < x < b$ memberikan selang terbuka yang terdiri dari semua bilangan antara a dan b, tidak termasuk titik-titik ujung a dan b. Ketaksamaan $a \le x \le b$ memberikan selang tertutup yang berpadanan, yang mencakup titik-titik ujung a dan b.

Penulisan Himpunan	Penulisan Selang	Grafik
$\{x : a < x < b\}$	(a,b)	
$\{x : a \le x \le b\}$	$[a,b]$	
$\{x : a \le x < b\}$	$[a,b)$	
$\{x : a < x \le b\}$	$(a,b]$	
$\{x : x \le b\}$	$(-\infty,b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty,b)$	
$\{x : x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan dapat dilakukan dengan cara:

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua pihak suatu ketaksamaan.
2. Mengalikan kedua pihak suatu ketaksamaan dengan suatu bilangan positif.

3. Mengalikan kedua pihak dengan suatu bilangan negatif tetapi arah tanda ketaksamaan berubah.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari ketaksamaan $2x - 5 \leq 6 - 3x \leq 4x + 8$

Jawab:

$2x - 5 \leq 6 - 3x \leq 4x + 8$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$2x - 5 \leq 6 - 3x$	dan	$6 - 3x \leq 4x + 8$
$\dots + \dots \leq \dots + \dots$	dan	$\dots - \dots \leq \dots - \dots$
$\dots \leq \dots$	dan	$\dots \leq \dots$
$\dots \leq \frac{\dots}{\dots}$	dan	$\dots \leq \frac{\dots}{\dots}$
		$\dots \leq \dots$

Jadi himpunan penyelesaian adalah ....

Soal 2

Tentukan himpunan jawab dari $2x^2 + 7x - 15 \leq 0$

Jawab:

Untuk mencari penyelesaian $2x^2 - 7x - 15 \leq 0$ dilakukan pemfaktoran sehingga

$$2x^2 - 7x - 15 \leq 0$$
$$(\dots + \dots)(\dots - \dots) \leq 0$$

Titik-titik pemecah: ..... dan .....

Ambil titik-titik uji: ....., ... dan .....

diperoleh

Jadi himpunan jawab dari $2x^2 - 7x - 15 \leq 0$ adalah ....

Soal 3

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\dfrac{x-2}{2x-5} > 1$

Jawab:

Bentuk $\dfrac{x-2}{2x-5} > 1$ dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} - \dots\dots\dots\dots > 0$$

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} - \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} > 0$$

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} > 0$$

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} > 0$$

Titik-titik pemecah: .... dan ......
Ambil titik-titik uji: ....., ... dan .....
diperoleh

Jadi himpunan penyelesaian adalah ....

Soal 4

Tentukan himpunan penyelesaian $(x - 5)(x + 3)^2(2x + 7) > 0$

Jawab:

Titik-titik pemecah: ...., ... dan ......
Ambil titik-titik uji: ....., ..., ... dan .....
diperoleh

Jadi himpunan penyelesaian adalah ....

1.2

NILAI MUTLAK DAN KETAKSAMAAN NILAI MUTLAK

Materi Pokok:	**1.2.1 Nilai Mutlak**
	1.2.2 Ketaksamaan Nilai Mutlak

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Mengubah bentuk nilai mutlak ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.
2. Menentukan himpunan penyelesaian soal-soal nilai mutlak.
3. Menentukan himpunan penyelesaian soal-soal ketaksamaan nilai mutlak.

1.2.1 NILAI MUTLAK

Definisi:

Nilai mutlak suatu bilangan riil x dinyatakan oleh |x|, didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat Nilai Mutlak

1. Untuk setiap bilangan riil x berlaku
   a. $|x| \geq 0$
   b. $|x| = |-x|$
   c. $-|x| \leq x \leq |x|$
   d. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
2. Untuk setiap bilangan riil x dan y berlaku
   a. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
   b. $|x - y| = |y - x|$
3. Jika $a \geq 0$, maka
   a. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$
   b. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ atau $x \leq -a \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$
4. *Ketaksamaan segitiga.* Untuk setiap bilangan riil x dan y berlaku
   a. $|x + y| \leq |x| + |y|$
   b. $|x - y| \leq |x| + |y|$
   c. $|x| - |y| \leq |x - y|$
   d. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
5. Untuk setiap bilangan riil x dan y berlaku
   a. $|xy| = |x||y|$
   b. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

   Kaitan bentuk akar dengan nilai mutlak adalah $\sqrt{x^2} = |x|$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tuliskan $|5x + 45|$ dalam bentuk tanpa nilai mutlak

Jawab:

$$|5x+4| = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Soal 2

Ubahlah $3|x| + |x - 2|$ ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak

Jawab:

$$|x| = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots, & \textit{jika} \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

❖ Untuk $x \geq 0 \cap x \geq 1$ diperoleh ....
Sehingga
$3(\dots\dots) + (\dots\dots\dots\dots) \quad = \dots\dots + \dots\dots\dots \quad = \dots\dots\dots\dots$

❖ Untuk $x \geq 0 \cap x < 1$ diperoleh ....
Sehingga
$3(\dots\dots) + (\dots\dots\dots\dots) \quad = \dots\dots + \dots\dots\dots \quad = \dots\dots\dots\dots$

❖ Untuk $x < 0 \cap x \geq 1$ diperoleh ....
Sehingga
$3|x| + |x - 2| = \dots\dots\dots\dots$

❖ Untuk $x < 0 \cap x < 1$ diperoleh ....
Sehingga
$3(\dots\dots) + (\dots\dots\dots\dots) \quad = \dots\dots + \dots\dots\dots \quad = \dots\dots\dots\dots$

Jadi

$$3|x| + |x - 2| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & jika \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & jika \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & jika \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

1.2.2 KETAKSAMAAN NILAI MUTLAK

Proses penyelesaian ketaksamaan yang memuat nilai mutlak adalah mengubah bentuk ketaksamaan yang diketahui sehingga tidak memuat nilai mutlak lagi, dengan menggunakan:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$
3. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Carilah himpunan penyelesaian dari:

a. $\left|\frac{4x}{5} + 2\right| \leq 4$

b. $\left|\frac{2}{x} - 3\right| > 6$

Jawab:

a. Gunakan sifat $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ untuk menyelesaikan

$\left|\frac{4x}{5} + 2\right| \leq 4$

...... ≤ .... ≤ ....

..... - ..... ≤ .... ≤ ..... - .....

...... ≤ .... ≤ ....

...... ≤ .... ≤ .... (kalikan dengan ....)

...... ≤ .... ≤ .... (bagi dengan ......)

Jadi himpunan penyelesaian adalah............

b. Gunakan sifat $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$ untuk menyelesaikan $\left|\frac{2}{x} - 3\right| > 6$

.... < ...... atau .... > ....

.... < 0 .... > 0

$\frac{.................}{.........} < 0$ $\frac{.................}{.........} > 0$

Titik-titik pemecah: .... Titik-titik pemecah: ....

Ambil titik-titik uji: .... Ambil titik-titik uji: ....

diperoleh diperoleh

$\longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow$

.... atau ....

Jadi himpunan penyelesaian adalah ....

Soal 2

Tentukan himpunan penyelesaian $3|2x - 2| < |x + 20|$

Jawab:

$3|2x - 2| < |x + 20|$

|...........| < |..........|

$(...........)^2 < (...........)^2$

.... < ....

.... < 0

(...........)(...........) < 0

Titik-titik pemecah: ....

$\longleftrightarrow$

Jadi himpunan penyelesaian adalah ....

Soal 3

Tentukan himpunan penyelesaian dari $4|x| \leq |x-1| + 5$

Jawab:

$$|x| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots, & \textit{jika} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \textit{jika} \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots, & \textit{jika} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \textit{jika} \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Proses penyelesaiannya pada garis bilangan adalah sebagai berikut:

$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$x \geq 1$
$\|x\|$ = ...	$\|x\|$ = ...	$\|x\|$ = ...
$\|x-1\|$ = ...	$\|x-1\|$ = ...	$\|x-1\|$ = ...
Sehingga	Sehingga	Sehingga
......(....) ≤ (...........) + ...	......(....) ≤ (...........) + ...	...(....) ≤ (...........) + ...
.... ≤	.... ≤	.... ≤ ....
.... ≤	.... ≤	.... ≤ ....
.... ≥	.... ≤	.... ≤ ....
$HP_1 = (-\infty, 0) \cap$	$HP_2 = [0, 1) \cap$	$HP_3 = [1, \infty) \cap$ ....
=	=	= ....

HP = ... ∩ .... ∪ ....

= ....

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah ....

1.3

SISTEM KOORDINAT DAN GARIS LURUS

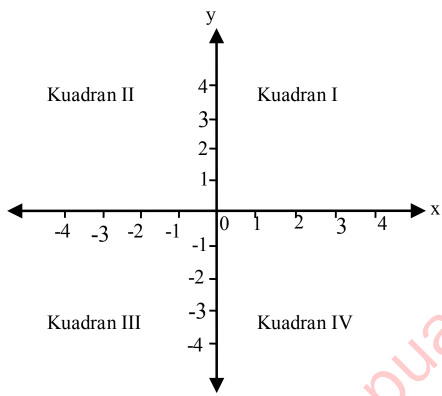
Materi Pokok:	**1.3.1 Sistem Koordinat** **1.3.2 Garis Lurus**
Materi Prasyarat: Bilangan Riil	

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menggambarkan titik pada koordinat Cartesius.
2. Menentukan jarak dua titik.
3. Menentukan persamaan lingkaran.
4. Menentukan kemiringan/gradien garis lurus.
5. Menentukan persamaan garis lurus.

1.3.1 SISTEM KOORDINAT



Koordinat Cartesius

Titik (a, b) adalah pasangan terurut dari bilangan a dan b. Bilangan a disebut koordinat x (absis) dan bilangan b disebut koordinat y (ordinat).

Jarak Dua Titik

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ maka jarak antara P dan Q dilambangkan d(P, Q) adalah

$$d(P,\ Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Persamaan Lingkaran

Persamaan baku sebuah lingkaran berjari-jari r dan pusat (h, k) adalah

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Rajahlah titik-titik (1,4) dan (8,-1) dalam bidang koordinat dan carilah jarak antara titik-titik tersebut dengan menggunakan gambar kemudian bandingkan dengan rumus jarak.

Jawab:

Jarak antara titik-titik tersebut adalah

$$\sqrt{(\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soal 2

Buktikanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (6, 4), (-1, 5) dan (11, 9) adalah samakaki.

Jawab:

Segitiga samakaki adalah segitiga yang jarak ketiga titik sudutnya ....

Misalkan titik A(6, 4), B(-2, 4) dan C(10, 8)

sehingga

$$d(A, B) = \sqrt{(\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(A, C) = \sqrt{(\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(B, C) = \sqrt{(\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots)^2}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Karena d(A, B) ...... d(A, C) ...... d(B, C) mengakibatkan ....

1.3.2 GARIS LURUS

Kemiringan/Gradien Garis

Sebuah garis melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan $x_1 \neq x_2$. Kemiringan m dari garis tersebut adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kesamaan Garis Lurus

1. Garis yang melalui sebuah titik (x_1, y_1) dengan kemiringan m mempunyai persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. Garis yang memotong sumbu y di (0, b) dengan kemiringan m mempunyai persamaan

$$y = mx + b$$

3. Garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ mempunyai persamaan

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Bentuk umum persamaan garis lurus adalah $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$ dan $B \neq 0$.

Garis vertikal tidak mempunyai kemiringan tetapi mempunyai persamaan $x = k$, dengan k adalah konstanta.

Garis-garis Sejajar

Dua garis tak vertikal dikatakan sejajar jika dan hanya jika keduanya mempunyai kemiringan yang sama.

Garis-garis Tegak Lurus

Dua garis tak vertikal saling tegak lurus jika dan hanya jika kemiringan keduanya saling berkebalikan negatif.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukan kemiringan garis yang melalui titik (-4, 3) dan (1, 7)

Jawab:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Jadi kemiringan garis tersebut adalah...........

Soal 2

Tentukanlah persamaan garis yang mempunyai kemiringan -2 dan memotong sumbu y pada angka 3, kemudian nyatakan dalam bentuk Ax + By + C = 0

Jawab:

m = ...

Perpotongan sumbu y adalah3 berarti garis melalui titik ....

Persamaan garis tersebut adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

y – ...... = ... (x – ......)

.... - ...... = ... - ....

.... = ...

.... = 0

Jadi persamaan garisnya adalah............

Soal 3

Cari nilai k sedemikian sehingga garis kx – 3y = 0

a. sejajar garis y = 2x + 4
b. tegak lurus garis 2x + 3y = 6

Jawab:

kx – 3y = 0

- 3y = ...

y = ...

sehingga m =..........

a. Garis kx – 3y = 0 sejajar garis y = 2x + 4

Dua garis dikatakan sejajar jika ....

Gradien garis y = 2x + 4 adalah ....

Sehingga .... = ...

k = ...

Jadi nilai k adalah ....

b. Garis $kx - 3y = 0$ tegak lurus garis $2x + 3y = 6$

Dua garis saling tegak lurus jika ....

Gradien garis $2x + 3y = 6$ adalah

$3y$ = ...

y = ...

diperoleh m = ...

sehingga ...... x .... = -1

.... = -1

.... = ...

k = ...

Jadi nilai k adalah ....

2.1
FUNGSI RIIL

Materi Pokok:	**2.1 Fungsi Riil**
Materi Prasyarat:	**1. Sistem Bilangan Riil** **2. Ketaksamaan**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menentukan ciri-ciri fungsi.
2. Menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi.

Definisi

Misalnya $A, B \subseteq \mathbf{R}$, fungsi $f: A \rightarrow B$ adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap unsur $x \in A$ dengan tepat satu unsur $y \in B$.

Fungsi dilambangkan dengan $y = f(x)$, x disebut variabel bebas dan y disebut variabel terikat karena nilainya bergantung pada x.

Daerah asal (D_f) dan daerah hasil (R_f) fungsi f, yaitu:

$D_f = \{x \in \mathbf{R}: f(x) \in \mathbf{R}\}$ dan $R_f = \{f(x) \in \mathbf{R}: x \in \mathbf{R}\}$

D_f disebut *daerah asal alamiah* (*natural domain*) dari fungsi *f*.

Soal 1

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $f(x) = 3 - 2x - x^2$

Jawab:

Daerah asal fungsi

D_f = ...

Agar fungsi bernilai riil maka persamaan kuadrat dalalm x harus mempunyai akar riil yang syaratnya $D \geq 0$

...... - .... ≥ 0

...... - .... ≥ 0

.... ≥ 0

.... ≥ 0

.... ≥ ....

.... ≤ ....

Jadi R_f = ...

Soal 2

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari

$f(x) = 3 + \sqrt{4 - 3x}$

Jawab:

Agar $f(x) \in \mathbf{R}$, syaratnya adalah .... ≥ 0 sehingga

D_f = ...

= (........, ...]

Karena untuk setiap $x \in D_f$ berlaku $\sqrt{4 - 3x}$ ...... 0, maka

$f(x) = 3 + \sqrt{4 - 3x} \geq$ .....

Sehingga daerah hasil f adalah

R_f = ...

= [......., ...)

2.2
JENIS-JENIS FUNGSI

Materi Pokok:	**2.2 Jenis-jenis Fungsi**
Materi Prasyarat:	**1. Definisi Fungsi** **2. Daerah Asal dan Daerah Hasil**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menyebutkan jenis-jenis fungsi.
2. Membedakan fungsi genap dan fungsi ganjil.
3. Mensketsa grafik fungsi.

Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi konstan
   Fungsi konstan adalah sebuah fungsi yang berbentuk $f(x) = k$, dengan k konstanta (bilangan riil). Contoh: $f(x) = 5$.
2. Fungsi identitas
   Fungsi identitas adalah fungsi yang berbentuk $f(x) = x$.
3. Fungsi polinom
   Fungsi polinom adalah sebuah fungsi yang diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas dengan memakai operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian. Fungsi

polinom berbentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

dengan koefisien-koefisien a berupa bilangan riil dan n adalah bilangan bulat tak negatif.

4. Fungsi rasional

   Fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dibentuk dari hasil bagi fungsi-fungsi polinom.

   Contoh: $y = \dfrac{3x}{2x^2 + 5}$

5. Fungsi aljabar

   Fungsi aljabar adalah suatu fungsi yang diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas melalui lima operasi aljabar yaitu penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan penarikan akar.

   Contoh: $f(x) = \sqrt[3]{1 - x + x^2}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt[4]{2x+1}} - 5$

6. Fungsi transenden

   Fungsi transenden adalah fungsi elementer yang bukan fungsi aljabar.

   Contoh: $f(x) = \cos x + \sin x$, $g(x) = 2^x - 3x$, $h(x) = \log(1-x^2)$

7. Fungsi dengan banyak aturan

   Contoh: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 + x, & x \geq 1 \end{cases}$

8. Fungsi nilai mutlak

   Fungsi nilai mutlak didefinisikan

   $$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

   Contoh: $f(x) = |2x|$

9. Fungsi bilangan bulat terbesar

   Fungsi bilangan bulat terbesar didefinisikan

$$f(x) = \|x\| = n \Leftrightarrow n \le x \le n + 1,\ n \text{ bilangan bulat}$$

Contoh: $f(x) = \left\| \frac{2}{x} \right\|$

10. Fungsi trigonometri

Contoh: y = cosx, y= sinx, y = tanx, y = $\sec^2 x$

Kesamaan Trigonometri

1. Kesamaan ganjil genap

   sin(-x) = -sin x   cos(-x) = cos x   tan(-x) = -tan x

2. Kesamaan ko fungsi

   $$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\ x$$

   $$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin\ x$$

   $$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cot\ x$$

3. Kesamaan Pythagoras

   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \mathrm{cosec}^2 x$

4. Kesamaan penambahan

   sin(x + y) = sinx cosy + cosx siny

   cos(x + y) = cosx cosy - sinx siny

   $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

5. Kesamaan sudut ganda

   sin2x = 2 sinx cosx

   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

6. Kesamaan setengah sudut

   $$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

7. Kesamaan jumlah

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

8. Kesamaan hasil kali

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\,[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\,[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

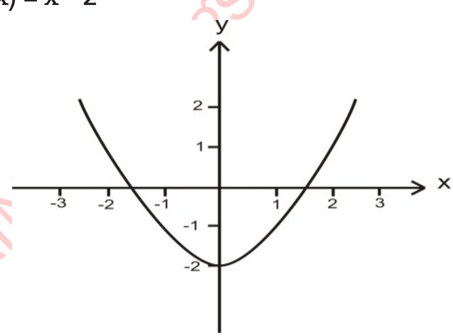
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\,[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

1. Fungsi genap

   Suatu fungsi dikatakan fungsi genap jika f(-x) = f(x) dan grafiknya simetri terhadap sumbu y.

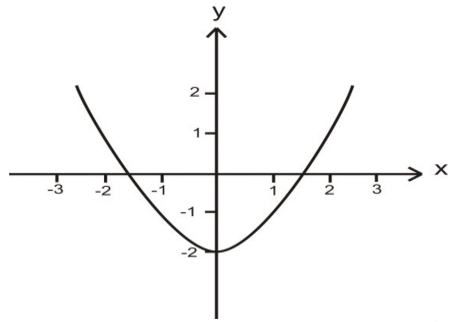
   Contoh: $f(x) = x^2 - 2$



2. Fungsi ganjil

   Suatu fungsi dikatakan fungsi ganjil jika f(-x) = -f(x) dan grafiknya simetri terhadap titik asal.

Contoh: $f(x) = x^3 - 2x$



Soal Latihan Terbimbing

Soal

Apakah fungsi berikut ini adalah fungsi genap atau fungsi ganjil atau tidak keduanya?

a. $h(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

b. $F(t) = -|t + 7|$

c. $G(x) = \|4x - 1\|$

d. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & jika\ \ x \leq 1 \\ 3x, & jika\ \ x > 1 \end{cases}$

Jawab:

a. $h(x) = \sqrt{x^2 + 8}$

$h(-x) = \sqrt{(\ldots\ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots\ldots}$

$= \sqrt{\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots}$

Ternyata h(x) ..... h(-x) sehingga $h(x) = \sqrt{x^2 + 8}$ adalah fungsi..............

b. $F(t) = -|t + 7|$

F(-t) = - |(.......) + 7|

= - |................|

Ternyata .... sehingga F(t) = - |t + 7| adalah fungsi ....

c. $G(x) = \|4x-1\|$

$G(-x) = \|4(........)-1\|$

$= \|..................\|$

Ternyata .... sehingga G(x) = $\|4x-1\|$ adalah fungsi.................

d. $h(x) = \begin{cases} -x^2+4, & jika\ \ x \le 1 \\ 3x, & jika\ \ x > 1 \end{cases}$

$h(-x) = \begin{cases} -(.........)^2+4, & jika\ \ x \le 1 \\ 3(.........), & jika\ \ x > 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} ...., & jika\ \ x \le 1 \\ ...., & jika\ \ x > 1 \end{cases}$

Ternyata..........................sehingga $h(x) = \begin{cases} -x^2+4, & jika\ \ x \le 1 \\ 3x, & jika\ \ x > 1 \end{cases}$ adalah fungsi.................

2.3

OPERASI PADA FUNGSI DAN PENDAHULUAN LIMIT

Materi Pokok:	**2.3.1 Operasi pada Fungsi** **2.3.2 Pendahuluan Limit**
Materi Prasyarat:	**1. Operasi Aljabar** **2. Fungsi**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menentukan jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi dan pangkat pada fungsi.
2. Menentukan komposisi dua fungsi.
3. Menggambar grafik fungsi dengan menggunakan translasi.
4. Menentukan eksistensi limit suatu fungsi.
5. Menentukan limit kiri dan limit kanan suatu fungsi.

2.3.1 OPERASI PADA FUNGSI

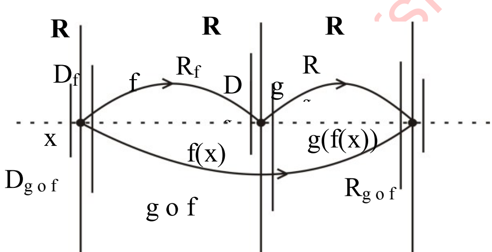
Operasi Aljabar pada Dua Fungsi

Misalnya fungsi f dan g mempunyai daerah asal D_f dan D_g, maka:

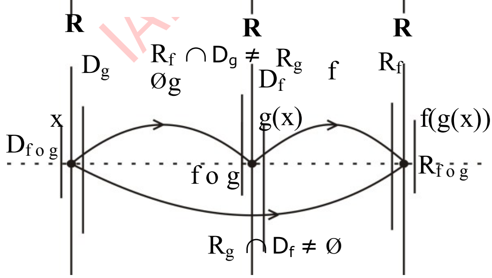
1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x)$
4. $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$
5. $f^n(x) = [f(x)]^n$

Daerah asal: $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = D$ dan $D_{f/g} = D - \{x \in \mathbf{R}: g(x) = 0\}$

Komposisi Fungsi



Komposisi fungsi g dengan f, ditulis g o f adalah suatu fungsi yang daerah asalnya himpunan bagian dari D_f dan aturannya ditentukan oleh $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Komposisi fungsi f dengan g, ditulis f o g adalah suatu fungsi yang daerah asalnya himpunan bagian dari D_g dan aturannya ditentukan oleh $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Translasi

Misalnya y = f(x)

1. y = f(x – h) berarti grafik y = f(x) bergeser sebesar h satuan ke kanan.
2. y = f(x + h) berarti grafik y = f(x) bergeser sebesar h satuan ke kiri.
3. y = f(x) + k berarti grafik y = f(x) bergeser sebesar k satuan ke atas.
4. y = f(x + h) – k berarti grafik y = f(x) bergeser sebesar h satuan ke kiri dan k satuan ke bawah.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ dan $g(x) = \dfrac{4}{x}$, tentukanlah

a. (f.g)(x)

b. $f^4(x) + g^4(x)$

c. (f o g)(x)

d. (g o f)(x)

dan nyatakan daerah asalnya

Jawab:

D_f = ...

D_g = ...

a. (f.g)(x) = f(x) . g(x)

= (....................)(........)

= ....

$D_{f.g} = D_f \cap D_g$ = ... $\cap$ .... = ...

b. $f^4(x) + g^4(x) = [f(x)]^4 + [g(x)]^4$

= (..................)^4 (.........)^4

= .... + ...

$= \dfrac{\text{..........................}}{\text{..................}} + \dfrac{\text{..........................}}{\text{..................}}$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

Daerah asal $f^4(x) + g^4(x)$ adalah ....

c. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f\,(\dots\dots\dots)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots$

Agar $(f \circ g)(x) \in \mathbf{R}$, syaratnya adalah .... ≥ 0 sehingga

$$\frac{(\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots\dots)}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \geq 0$$

Jadi $D_{fog} = \dots\dots\dots \cup \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g\,(\dots\dots\dots)$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots\dots\dots$

Soal 2

Cari f dan g sedemikian sehingga $p = f \circ g$

a. $p(x) = \dfrac{6}{(x^2 + x + 1)^4}$

b. $p(x) = \log\,(x^2 + 9x)$

Jawab:

a. $p(x) = (f \circ g)(x)$

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$g(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b. p(x) = (f o g)(x)

f(x) = ...

g(x) = ...

Soal 3

Sketsalah grafik dari g(x) = |x+3| - 4 dengan memanfaatkan pergeseran

Jawab:

Fungsi awal adalah g(x) = ...

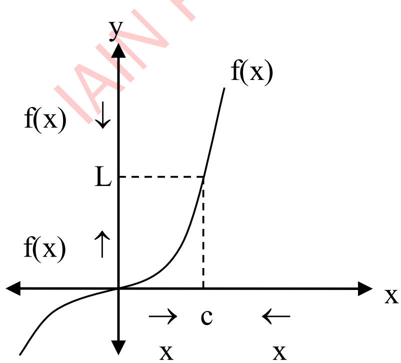
Grafik g(x) = |x+3| - 4 adalah grafik g(x) = ... digeser sebesar ....

Sehingga grafiknya adalah....

2.3.2 PENDAHULUAN LIMIT

Definisi Limit secara Intuisi

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ artinya ketika x menuju c tetapi berlainan dengan c maka f(x) dekat ke L.



Limit sepihak

1. Limit kiri

   $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ artinya jika x dekat ke c tetapi dari sebelah kiri c maka f(x) dekat ke L.

2. Limit kanan

   $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ artinya jika x dekat ke c tetapi dari sebelah kanan c maka f(x) dekat ke L.

Teorema

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L \ \ dan \ \ \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukan $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{16 + x^2}}{x - 2}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{16 + x^2}}{x - 2} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

Soal 2

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 25x}{x^2 + 5x}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 25x}{x^2 + 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

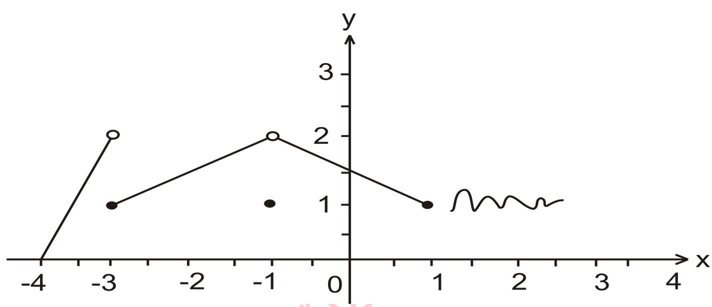
$$= \lim_{x \to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Soal 3

Diketahui grafik fungsi *f* sebagai berikut:



Tentukanlah

a. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

b. f(-3)

c. f(-1)

d. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

e. f(1)

f. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

g. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

h. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. f(-3) = ...

c. f(-1) = ...

d. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

e. f(1) = ...

f. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ = ...

g. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ = ...

h. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ = ...

Soal 4

Jika $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & jika \;\; x < 1 \\ x^2 - x + 2, & jika \;\; x \geq 1 \end{cases}$

Selidiki apakah fungsi f mempunyai limit di x = 1.

Jawab:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}$........................

= ....

= ......

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}$........................

= ....

= ......

Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ .... $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

maka fungsi f ....

2.4

TEOREMA LIMIT DAN KEKONTINUAN

Materi Pokok:	**2.4.1 Teorema Limit** **2.4.2 Kekontinuan**
Materi Prasyarat:	**1. Fungsi** **2. Limit**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menghitung limit dengan menggunakan teorema limit.
2. Menyebutkan syarat kekontinuan suatu fungsi.
3. Menentukan suatu fungsi kontinu atau tidak.

2.4.1 TEOREMA LIMIT

Teorema A

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. Maka:

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$

2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ dan n genap

Teorema B (Teorema Substitusi)

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

asalkan pada fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.

Limit Trigonometri

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Hitunglah $\lim\limits_{w \to -2} \sqrt{6w^3 + 5w^2}$ dengan mengunakan teorema A

Jawab:

$$\lim_{w\to -2}\sqrt{6w^3+5w^2} = \sqrt{\lim_{w\to -2}\ldots\ldots\ldots\ldots + \lim_{w\to -2}\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)+\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)+\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots+\ldots\ldots}$$
$$= \sqrt{\ldots\ldots}$$

Soal 2

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}$

Jawab:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$
$$= \frac{(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)}$$
$$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots$$

Soal 3

Jika:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 3 \text{ dan } \lim_{x\to a} g(x) = -1 \text{ tentukan } \lim_{x\to a}\left[f(x)+3g(x)\right]^3$$

Jawab:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+3g(x)\right]^3 = \lim_{x\to a}\left[\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$= \left[\lim_{x\to a}\ldots\ldots\ldots+\lim_{x\to a}\ldots\ldots\ldots+\lim_{x\to a}\ldots\ldots\ldots\ldots+\lim_{x\to a}\ldots\ldots\ldots\right]$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots$$

2.4.2 KEKONTINUAN

Definisi

f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan $\lim_{x \to c} f(x)$ = f(c)

Syarat Fungsi Kontinu

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
2. f(c) ada
3. $\lim_{x \to c} f(x)$ = f(c)

   Jika salah satu dari syarat di atas tidak terpenuhi, maka f tak kontinu di c.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Periksa apakah $h(t) = \begin{cases} \dfrac{4t-8}{t-2}, & jika \ t \neq 2 \\ 2, & jika \ \ t = 2 \end{cases}$ kontinu di t = 2

Jawab:

- $\lim_{t \to 2} h(t) = \lim_{t \to 2} \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \lim_{t \to 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$
  - ❖ $\lim_{t \to 2} h(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- h(2) = ...
- $\lim_{t \to 2} h(t) \ldots\ldots\ldots\ldots h(2)$

Jadi, $h(t) = \begin{cases} \dfrac{4t-8}{t-2}, & jika \ t \neq 2 \\ 2, & jika \ \ t = 2 \end{cases}$ .... di t = 2

3.1

DUA MASALAH DENGAN SATU TEMA DAN TURUNAN

Materi Pokok:	**3.1.1 Dua Masalah dengan Satu Tema** **3.1.2 Turunan**
Materi Prasyarat:	**1. Fungsi** **2. Limit**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menyelesaikan dua masalah dengan satu tema, yaitu garis singgung dan kecepatan sesaat.
2. Menyelesaikan aplikasi dari dua masalah dengan satu tema.
3. Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan definisi turunan.
4. Membuktikan suatu fungsi dapat diturunkan atau tidak.

3.1.1 DUA MASALAH DENGAN SATU TEMA

Rumus gradien (kemiringan) garis singgung di titik P (c, f(c))

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Rumus kecepatan sesaat di t

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah kemiringan garis singgung dari $y = 25 - x^2$ di titik (5, 0).

Jawab:

- Sketsa grafik $y = 25 - x^2$ seteliti mungkin dan gambar garis singgung di titik (5, 0).
- Taksir kemiringan garis singgung berdasarkan gambar di atas.
- Untuk mencari kemiringan garis singgung yang sebenarnya gunakan rumus:

  $$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

  Diketahui c = ...

  Substitusi nilai c ke rumus di atas sehingga

  $$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots + h) - f(\ldots)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[25 - (\ldots + h)^2\right] - \left[25 - (\ldots)^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \ldots\ldots.$$

Jadi, kemiringan garis singgung dari $y = 25 - x^2$ di titik (5, 0) adalah ....

Soal 2

Tentukanlah persamaan garis singgung pada $y = \frac{5}{(x-2)}$ di titik (7, 1).

Jawab:

- Gunakan rumus untuk menentukan kemiringan garis singgung.

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Diketahui c = ...

Substitusi nilai c ke rumus di atas sehingga

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots + h) - f(\ldots)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{5}{(\ldots + h) - 2}\right] - \left[\frac{5}{\ldots - 2}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots.$$

- Dengan diketahui m = ... dan titik (7,1) pada garis tersebut, maka persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

  $$y - y_0 = m(x - x_0)$$

  Jadi persamaan garis singgung pada $y = \frac{5}{(x-2)}$ di titik (7,1) adalah...............

Soal 3

Anggap sebuah benda akan jatuh 16 t^2 meter dalam t detik.

a. Seberapa jauh benda tersebut akan jatuh antara $t = 3$ dan $t = 4$.

b. Berapa kecepatan rata-rata pada selang $3 \leq t \leq 4$.

c. Tentukanlah kecepatan sesaat pada $t = 3$.

Jawab:

a. Andaikan s adalah posisi benda jatuh
   sehingga s = ...
   Untuk $t = 3$ diperoleh s = ...
   Untuk $t = 4$ diperoleh s = ...
   Jarak benda yang jatuh pada $t = 3$ dan $t = 4$ adalah ....
   Jadi, jauh benda tersebut akan jatuh antara $t = 3$ dan $t = 4$ adalah ....

b. Nilai s di saat $t = 3$ adalah............
   Nilai s di saat $t = 4$ adalah............
   Kecepatan rata-rata ($v_{rata\text{-}rata}$) adalah jarak antara posisi pertama ke posisi kedua dibagi dengan waktu tempuh.

   Sehingga;

$$v_{rata-rata} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \ldots\ldots\ldots$$

Jadi, kecepatan rata-rata pada selang $3 \le t \le 4$ adalah ....

c. Gunakan rumus kecepatan sesaat

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jadi kecepatan sesaat benda akan jatuh pada saat t = 3 adalah ....

Soal 4

Andaikan sebuah benda bergerak sepangjangsebuah garis $\sqrt{t}$ meter dalam t detik.

a. Cari kecepatan sesaat pada $t = c$, $c > 0$.

b. Kapan benda ini mencapai kecepatan $\frac{1}{6}$ meter/detik?

Jawab:

a. Kecepatan pada saat $t = c$ adalah

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h} \; x \; \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

b. Diketahui v = ...

Diperoleh c = ...

Jadi partikel akan berhenti pada saat t = ...

Soal 5

Suatu kultur bakteri tertentu berkembang sehingga mempunyai massa sebesar $2t^2 + 1$ gram setelah t jam. Berapa laju perkembangan pada $t = 2$?

Jawab

Anggap laju perkembangan = kecepatan sesaat

Sehingga

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Karena t = 2, diperoleh v = ...

Jadi laju perkembangan suatu bakteri adalah ....

3.1.2 TURUNAN

Definisi (turunan fungsi di satu titik)

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{Asalkan limit ini ada}$$

Bentuk yang Setara untuk Turunan

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika $x = c + h$ maka $h = x - c$

Jika $h \to 0$ maka $x \to c$, sehingga

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan Kiri Fungsi

$$f'_-(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{atau} \quad f'_-(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan Kanan Fungsi

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{atau} \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Syarat Suatu Fungsi Dapat Diturunkan di c

f terdiferensialkan di c jika dan hanya jika $f'_-(c) = f'_+(c)$

Keterdiferensialan Menunjukkan Kekontinuan

Teorema

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c

Soal Latihan terbimbing

Soal 1

Andaikan f(x) = 3x² – x, carilah f ′(5)

Jawab:

Gunakan definisi turunan untuk menentukan nilai dari f'(5)

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\ldots+h)-f(\ldots)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ldots\ldots\ldots}{h}=\lim_{h\to 0}\ldots\ldots\ldots=\ldots$$

Soal 2

Gunakan definisi turunan untuk mencari turunan di x dari $g(x)=\dfrac{2}{x+8}$

Jawab:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{x+h+8}-\dfrac{2}{x+h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{1}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{1}{h}\right]=\cdots$$

Soal 3

Gunakan $f'(x)=\lim_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ untuk mencari $f'(x)$ dari

$$f(x)=\frac{x}{x-2}$$

Jawab:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\dfrac{t}{t-2}-\dfrac{x}{x-2}}{t-x}=\lim_{t\to x}\left[\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{1}{t-x}\right]$$

$$=\lim_{t\to x}\left[\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{1}{t-x}\right]=\lim_{t\to x}\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=\cdots$$

3.2

ATURAN MENCARI TURUNAN

Materi Pokok:	**3.2.1 Aturan Mencari Turunan** **3.2.2 Turunan Sinus dan Kosinus** **3.2.3 Aturan Rantai**
Materi Prasyarat:	**1. Operasi pada Fungsi** **2. Fungsi Trigonometri** **3. Fungsi Komposisi**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menentukan turunan fungsi aljabar.
2. Menentukan turunan fungsi trigonometri.
3. Menentukan turunan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri dengan aturan rantai.

3.2.1 ATURAN MENCARI TURUNAN

Lambang turunan untuk fungsi $y = f(x)$ adalah y', $f'(x)$, Dy, $D_x y$, atau $\dfrac{dy}{dx}$

Teorema yang dapat digunakan untuk mencari turunan suatu fungsi:

1. Aturan fungsi konstansta
   Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta maka untuk sembarang x, $f'(x) = 0$ atau $D(k) = 0$
2. Aturan fungsi identitas
   Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ atau $D(x) = 1$
3. Aturan pangkat
   Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ atau $D(x^n) = nx^{n-1}$
4. Aturan kelipatan konstanta
   Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x)$ atau $D[k.f(x)] = k.Df(x)$
5. Aturan jumlah
   Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ atau $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$
6. Aturan selisih
   Jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ atau $D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$
7. Aturan hasil kali
   Andaikan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan maka $(f.g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ atau $D[f(x)g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$
8. Aturan hasil bagi
   Andaikan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan dengan $g(x) \neq 0$ maka:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

atau

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

Soal Latihan terbimbing

Soal 1

Carilah *Dy* dari

a) $y = \dfrac{5}{4x^3}$

b) $y = -x^4 + 3x^2 - 6x + 1$

c) $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

d) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

Jawab:

a) Dengan menggunakan aturan turunan pangkat diperoleh

$Dy = D(\ldots\ldots\ldots\ldots) = D(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \frac{5}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Dengan menggunakan aturan turunan jumlah dari selisih diperoleh

$Dy = D(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = D(\ldots\ldots\ldots\ldots) + D(\ldots\ldots\ldots\ldots) - D(\ldots\ldots\ldots) + D(\ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) Dengan menggunakan aturan turunan hasil kali 2 fungsi diperoleh

$Dy = D(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) Dengan menggunakan aturan turunan hasil bagi 2 fungsi diperoleh

$$Dy = D\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

3.2.2 TURUNAN SINUS DAN KOSINUS

Turunan Fungsi Trigonometri

1. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\cos ec^2 x$
5. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $\frac{d}{dx}(\cos ec\ \ x) = -\cos ecx \cot x$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Carilah turunan dari

a. $y = \sin x \cos x$

b. $y = \sin^2 x$

c. $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Jawab:

a. Gunakan aturan turunan hasil kali 2 fungsi diperoleh

y' = ... + ...

= ....

b. Fungsi $y = \sin^2 x$ diubah menjadi $y = \sin x . \sin x$, gunakan aturan turunan hasil kali 2 fungsi diperoleh

y' = ... + ...

= ....

c. Gunakan aturan turunan hasil bagi 2 fungsi diperoleh

$$y' = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Soal 2

Cari persamaan garis singgung pada $y = \tan x$ di = $-\pi/4$

Jawab:

Untuk mencari persamaan garis singgung suatu fungsi, harus dicari terlebih dahulu kemiringan garis (gradien) dimana gradien itu adalah turunan pertama fungsi sehingga

y' = ...

Untuk $x = -\pi/4$ diperoleh y = ... dan y' = ...

Persamaan garis singgung melalui titik (......,........) dan gradien (m)=........ adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

y - ... = ... (x - ...)

... = ...

... = ...

3.2.3 ATURAN RANTAI

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ jika y terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x dan $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ atau $D_x y = D_u y \,.\, D_x u$

Dalam notasi *Leibniz* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Jika $y = (3x^3 - 3x^2 + 3x)^3$, carilah $D_x y$

Jawab:

Misalnya $u = 3x^3 - 3x^2 + 3x$

Maka $y = u^3$

Jadi, $D_x y = D_u y . D_x u$

$= (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots\ldots$

Soal 2

Tentukanlah $\dfrac{dy}{dx}$ untuk $y = \sin\left(\dfrac{5x-2}{x+9}\right)$

Jawab:

Misalnya $u = \dfrac{5x-2}{x+9}$ maka $y = \sin u$

Jadi, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} . \dfrac{du}{dx}$

$$= \cos u \left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \cos\left(\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\right)$$

Soal 3

Tentukanlah $D_x\{\sin[\cos(\sin 3x)]\}$ dengan aturan rantai bersusun.

Jawab:

Misalnya $u = \sin 3x$

$v = \cos u$

$y = \sin v$

Jadi,

$D_x y = D_v y . D_u v . D_x u$

$= (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

= ....

= ....

= ....

(b) $-2\sin t \sin(\cos t)\cos[\cos(\cos t)]\sin[\cos(\cos t)]$

1. (a) $2\sin^3 2x$
   (b) $\sin^4 2x$

3.3

TURUNAN TINGKAT TINGGI & TURUNAN IMPLISIT

Materi Pokok:	**3.3.1**	**Turunan Tingkat Tinggi**
	3.3.2	**Turunan Implisit**
Materi Prasyarat:	**1.**	**Aturan Pencarian Turunan Berbagai Macam Fungsi**
	2.	**Notasi Leibniz**

Indikator Kompetensi

1. Menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi.
2. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan turunan tingkat tinggi.
3. Menentukan turunan fungsi implisit.

3.3.1 TURUNAN TINGKAT TINGGI

Turunan pertama dari $y = f(x)$ adalah $f'(x)$

Turunan kedua dari $y = f(x)$ adalah $f''(x)$

$$\vdots$$

Turunan ke-n dari $\frac{d^3y}{dx^3}$ $y = f(x)$ adalah $f^{(n)}(x)$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Hitunglah $\frac{d^3y}{dx^3}$ dari $y = (4x+3)^5$

Jawab:

Misalnya $u = 4x+3$ sehingga $y = u^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

= (.............) (..............)

= ....

= ....

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

= ....

= ....

= ....

$\frac{d^3y}{dx^3}$ = ...

= ....

= ....

= ....

Soal 2

Hitunglah ”(3) dari ( ) $\frac{3 \quad 1}{}$

Jawab:

Gunakan aturan turunan hasil bagi 2 fungsi, diperoleh:

$$f'(x) = \frac{\dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$f''(x) = \frac{\dots\dots\dots\dots - \dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$f''(3) = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

Soal 3

Tentukanlah

a. $D_x^5(x^5)$

b. $D_x^4(5x^3 + 3x - 7)$

c. $D_x^5\left(\frac{1}{x}\right)$

Jawab:

a. Gunakanlah aturan $D_x^n(x^n) = n!$, sehingga diperoleh

$D_x^5(x^5) = \dots\dots\dots\dots$

b. Gunakanlah aturan pencarian turunan dan $D_x^n(x^n) = n!$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} D_x^4(5x^3 + 3x - 7) &= D_x^4(\dots\dots) + D_x^4(\dots\dots) - D_x^4(\dots\dots) \\ &= \dots\dots + \dots\dots - \dots\dots \\ &= \dots\dots \end{aligned}$$

c. Gunakanlah rumus $D_x^n\left(\frac{1}{x}\right)$, sehingga diperolah

$$D_x^5\left(\frac{1}{x}\right) = \text{............}$$
$$= \text{............}$$

Soal 5

Jika $s = \frac{1}{2}t^4 - 6t^3 + 24t^2$, cari kecepatan dari benda yang bergerak bilamana percepatannya nol.

Jawab:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad = \text{...............}$$
$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$= \text{..............}$$

Jika $a = 0$ maka .... = 0

( )( ) = 0

t_1 = ... t_2 = ...

Apabila t_1 = ... diperoleh v_1 = ...
Apabila t_2 = ... diperoleh v_2 = ...
Jadi kecepatan dari benda tersebut adalah ....

3.3.2 TURUNAN IMPLISIT

Kita akan menentukan turunan fungsi $y = y(x)$ yang terkadang secara implisit dalam $F(x,y)=G(x,y)$. Jika fungsi y terdiferensialkan terhadap x, maka:

$$\frac{d}{dx}(F(x,y)) = \frac{d}{dx}(G(x,y))$$

Dengan menganggap y sebagai fungsi dari x akan menghasilkan y' sebagai fungsi dari x dan y.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Carilah $D_x y$ dari $2x^3 + 6xy^2 - 5y^3 = 0$ dengan menggunakan turunan implisit.

Jawab:

$$D_x\,(2x^3 + 6xy^2 - 5y^3) = D_x(0)$$

$$\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots D_x y - \ldots\ldots\ldots\ldots D_x y = 0$$

$$D_x y(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ )\quad = \ldots\ldots\ldots$$

$$D_x y \quad = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Soal 2

Carilah $\dfrac{dy}{dx}$ jika $xy + \cos y = x^2$

Jawab:

$$\frac{d}{dx}(xy + \cos y) = \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \;+\; \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dx}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4.1

MAKSIMUM, MINIMUM, KEMONOTONAN, DAN KECEKUNGAN

Materi Pokok:	**4.1.1 Maksimum dan Minimum** **4.1.2 Kemonotonan dan Kecekungan**
Materi Prasyarat:	**1. Kekontinuan** **2. Turunan**

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Membedakan antara nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi.
2. Menentukan titik-titik kritis dari suatu fungsi.
3. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan maksimum dan minimum.
4. Menentukan fungsi naik dan fungsi turun dari suatu fungsi.
5. Menentukan fungsi cekung ke atas dan fungsi cekung ke bawah dari suatu fungsi.
6. Menentukan titik balik dari suatu fungsi.

4.1.1 MAKSIMUM DAN MINIMUM

Definisi

Andaikan *S*, daerah asal *f*, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

i. *f(c)* adalah nilai maksimum *f* pada *S* jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua *x* di *S.*

ii. *f(c)* adalah nilai minimum *f* pada *S* jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua *x* di *S.*

iii. *f(c)* adalah nilai ekstrim *f* pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Teorema Eksistensi Maksimum Minimum

Jika *f* kontinu pada selang tertutup [*a*,*b*], maka *f* mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

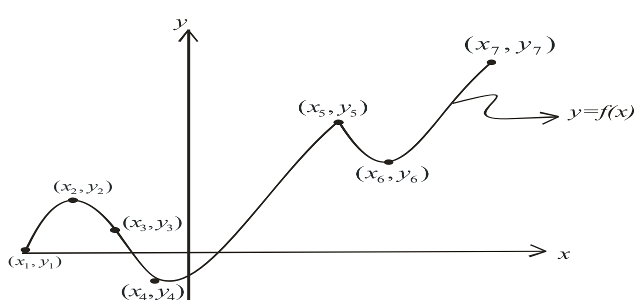
Teorema Titik Kritis

Andaikan *f* didefinisikan pada selang I yang memuat titik *c.* Jika *f(c)* adalah titik ekstrem maka *c* haruslah suatu titik kritis; yakni c berupa salah satu

i. Titik ujung dari *I*

ii. Titik stasioner dari *f* ($f'(c) = 0$)

iii. Titik singular dari *f* ($f'(c)$ tidak ada)



Berdasarkan grafik fungsi $y = f(x)$ pada selang $[x_1, x_7]$ di atas dapat diperoleh:

1. Titik ujung: (x_1, y_1) dan (x_7, y_7)
2. Titik stasioner: (x_2, y_2), (x_4, y_4) dan (x_6, y_6) karena $f'(x) = 0$
3. Titik singular: (x_5, y_5) karena mempunyai sudut yang tajam
4. Titik-titik kritis: (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6) dan (x_7, y_7)
5. Nilai maksimum adalah y_7 dan nilai minimum adalah y_4.

Untuk menghitung nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi kontinu *f* pada selang tertutup *I* dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1 Carilah titik-titik kritis dari *f* pada *I*.

Langkah 2 Hitunglah *f* pada setiap titik-titik kritis. Yang terbesar adalah nilai maksimum dan yang terkecil adalah nilai minimum.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah titik-titik kritis dari $h(t) = 4t^3 + 3t^2 - 6t + 1$ pada selang $I = [-2,1]$ dan carilah nilai maksimum dan nilai minimumnya.

Jawab:

Turunan pertama dari $h(t) = 4t^3 - 3t^2 -18t + 10$ adalah

$h'(t)$ = ...

Titik ujung: t = ... dan t = ...

Titik stasioner: $h'(t)=0$

.... $= 0$

( )( ) $= 0$

t= .... t= ....

Titik singular: tidak ada karena ....
sehingga titik-titik kritis adalah ....

Untuk $t =$ .... $h(t) =$ ....
$=$ ....
$t =$ .... $h(t) =$ ....
$=$ ....
$t =$ .... $h(t) =$ ....
$=$ ....
$t =$ .... $h(t) =$ ....
$=$ ....

Jadi nilai maksimum adalah .... dan nilai minimum adalah ....

Soal 2

Kawat sepanjang 20 inci dipotong menjadi dua; satu potong ditekuk untuk membentuk bujursangkar dan yang lainnya ditekuk untuk membentuk lingkaran. Di mana kawat harus dipotong agar jumlah luas bujur sangkar dan luas lingkaran minimum atau maksimum (pertimbangkan juga kemungkinan tanpa memotong).

Jawab:

Misalnya A = Luas bujursangkar
B = Luas lingkaran
C = Luas bujursangkar dan lingkaran

sehingga diperoleh C = A + B

Coba Anda ingat lagi rumus luas bujursangkar dan luas lingkaran

Akibatnya C = ... + ...

Panjang kawat adalah ....

Jika kawat itu dibuat lingkaran dan bujursangkar, coba Anda ingat lagi keliling bujursangkar dan lingkaran.

Akibatnya .... + ... = ...

.... = ...

$s = \frac{\text{....................................}}{\text{..........................}}$

= ....

Substitusi nilai s ke dalam C = ... + ...

Diperoleh C = ... + ...

= ....

Berdasarkan soal, jari-jari lingkaran (r) berada pada selang $[0, \frac{8}{\pi}]$

Turunkan C terhadap r $\frac{dC}{dr}$ = ...

Agar c minimum maka $\frac{dC}{dr}$ = ...

.... = ...

.... = ...

$r = \frac{\text{.....................}}{\text{................}}$

$= \frac{\text{...........}}{\text{.............}}$

Titik-titik kritis: r = ... r = ... dan r = ...

Untuk r = ... s = ... = ...

r = ... s = ... = ...

r = ... s = ... = ...

Jika r = ... s = ... maka C = ...

= ....

Jika r = ... s = ... maka C = ...

= ....

Jika r = ... s = ... maka C = ...

= ....

Jadi jumlah luas lingkaran dan bujursangkar minimum ketika .... dan jumlah luas lingkaran dan bujursangkar maksimum ketika ....

4.1.2 KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

1) Kemonotonan

Definisi

Andaikan f terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup, atau tak satu pun). Kita katakan bahwa:

(1) f adalah naik pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(2) f adalah turun pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(3) f monoton murni pada I jika ia naik pada I atau turun pada I

Teorema Kemonotonan

Andaikan f kontinu pada selang I dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dari I.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f naik pada I.
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f turun pada I.

2) Kecekungan

Definisi

Andaikan f terdiferensial pada selang terbuka $I = (a,b)$. Jika *f'* naik pada *I*, *f* (dan grafiknya) cekung ke atas disana; jika *f'* turun pada *I*, *f* cekung ke bawah pada *I*.

Teorema Kecekungan

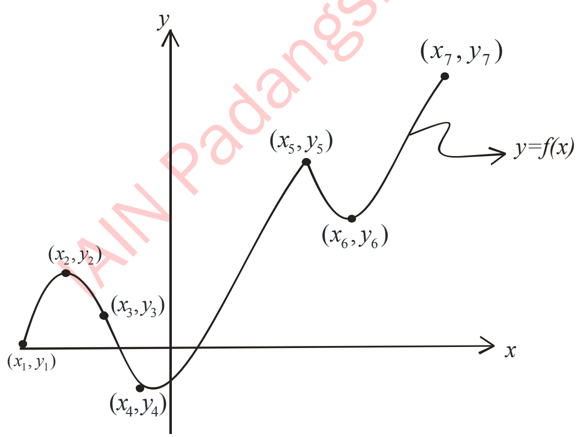
Andaikan *f* terdiferensial dua kali pada selang terbuka (a,b).

(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua *x* dalam (*a,b*), maka *f* cekung ke atas pada (*a,b*).

(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua *x* dalam (*a,b*), maka *f* cekung ke bawah pada (*a,b*).

Titik Balik

Andaikan *f* kontinu di c. Titik (*c*, *f*(*c*)) adalah titik balik dari grafik *f* jika *f* cekung ke atas pada satu sisi dan cekung kebawah pada sisi lainnya dari *c*.



Berdasarkan grafik fungsi y = f(x) pada selang $[x_1, x_7]$ di atas dapat diperoleh:

1. Fungsi naik pada selang $[x_1, x_2]$, $[x_4, x_5]$ dan $[x_6, x_7]$
2. Fungsi turun pada selang $[x_2, x_4]$ dan $[x_5, x_6]$

3. Fungsi cekung ke atas pada selang $[x_3, x_5]$ dan $[x_5, x_7]$
4. Fungsi cekung ke bawah pada selang $[x_1, x_3]$
5. Titik balik adalah (x_3, y_3)

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah dimana $g(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3}$ naik dan di mana $g(t)$ turun dengan menggunakan teorema kemonotonan

Jawab:

Turunan pertama dari fungsi $g(t) = \frac{t^3}{4} - \frac{t^3}{3}$ adalah

$g'(t)$ = ...

Fungsi dikatakan naik jika $g'(t) > 0$

sehingga .... > 0

Fungsi dikatakan turun jika $g'(t) < 0$

sehingga .... < 0

Jadi fungsi naik pada selang .... dan fungsi turun pada selang ....

Soal 2

Jika $f(x) = \frac{4}{3}(x-4)^3 + 10$, tentukan di mana f cekung ke atas dan cekung ke bawah dengan menggunakan teorema kecekungan serta titik baliknya.

Jawab:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{4}{3}(x-4)^3 + 10$ adalah

$f'(x)$ = ...

= ....

Turunan kedua dari $f(x) = (x-3)^3 + 4$ adalah

$f''(x)$ = ...

= ....

Fungsi dikatakan cekung ke atas jika $f''(x) > 0$

sehingga .... > 0
Fungsi dikatakan cekung ke bawah jika $f''(x) < 0$
sehingga .... < 0

Jadi fungsi cekung ke atas pada selang ...... dan cekung ke bawah pada selang .... serta titik baliknya adalah ....

4.2

MAKSIMUM DAN MINIMUM LOKAL SERTA PENERAPANNYA

Materi Pokok: **4.2.1 Maksimum dan Minimum Lokal**
4.2.2 Lebih Banyak Masalah Maksimum dan Minimum

Materi Prasyarat: **1. Turunan**
2. Maksimum dan Minimum

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Membedakan maksimum lokal dan minimum lokal dari suatu fungsi.
2. Menentukan nilai maksimum lokal dan nilai minimum lokal suatu fungsi.
3. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan maksimum dan minimum.

4.2.1 MAKSIMUM DAN MINIMUM LOKAL

Definisi

Andaikan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

(i) $f(c)$ nilai maksimum lokal f jika terdapat selang (a,b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a,b) \cap S$.

(ii) $f(c)$ nilai minimum lokal f jika terdapat selang (a,b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a,b) \cap S$.

(iii) $f(c)$ nilai ekstrem lokal f jika ia berupa nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

Teorema Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Lokal

Andaikan f kontinu pada selang terbuka (a,b) yang memuat titik kritis c.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c,b), maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a,c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c,b), maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

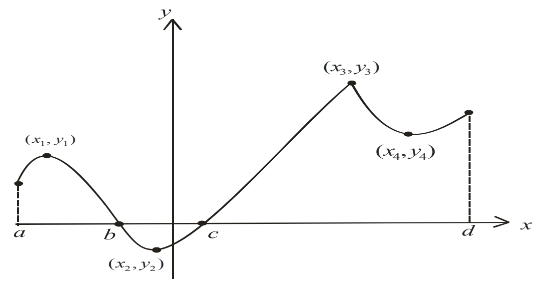
(iii) Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrem lokal f.

Teorema Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Lokal

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a,b) yang memuat c, dan andaikan $f'(c) = 0$.

(i) Jika $f''(c) < 0$, $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.

(ii) Jika $f''(c) > 0$, $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.



Berdasarkan grafik fungsi y = f(x) pada selang (a, d) di atas diperoleh:

1. Maksimum lokal: titik (x_1, y_1).
2. Minimum lokal: titik (x_4, y_4).
3. Maksimum global: titik (x_3, y_3).
4. Minimum global: titik (x_2, y_2).

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah titik-titik kritis dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$ dan carilah nilai maksimum lokal dan minimum lokalnya.

Jawab:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$ adalah

$f'(x)=$ ....

Titik ujung :

Titik stasioner : $f'(x)$ = ...

.... = ...

Titik singular : .... karena ....

sehingga diperoleh titik-titik kritis: ....

....

Turunan kedua dari $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$ adalah

$f''(x) =$ ....

Substitusi nilai x pada titik stasioner ke turunan kedua diperoleh:

$x =$ ....; $f''(x)$ =................. .... $f(x) =$ ....

= .... = ...

Berarti f''(....).....0 sehingga f(.......) adalah nilai ....

$x=$ .... $f''(x)$ = ... $f(x) =$ ....

= .... = ...

Berarti f''(....).....0 sehingga f(.......) adalah nilai ....

Jadi nilai maksimum lokal adalah .... dan nilai minimum lokal adalah ....

Soal 2

Tentukanlah titik-titik kritis dari fungsi $g(t) = 2 - (t-1)^{2/3}$ dan carilah nilai maksimum lokal dan nilai minimum lokalnya.

Jawab:

Turunan pertama dari $g(t) = 2 - (t-1)^{2/3}$ adalah

$$g'(t) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

Titik stasioner: $g'(t) =$ ......

= ......

Titik singular: .... karena ....

sehingga diperoleh titik-titik kritis:..................................

Gunakan uji turunan pertama untuk menentukan maksimum lokal dan minimum lokal pada titik kritis $t =$ ...... dengan garis bilangan.

$g'(t)$ ⟷

Karena g'(.....) < 0 untuk selang .... dan g'(....) > 0 untuk selang.................... maka *g(...........)* adalah nilai ....

Untuk t = ... $g(t)$ = ...
= ....

Jadi nilai maksimum lokal .... dan nilai minimum lokal ....

Soal 3

Cari nilai maksimum dan minimum (global) dari $f(x) = 8\sqrt{x} - 4x$ pada [0,9].

Jawab:

Turunan pertama dari $f(x) = 8\sqrt{x} - 4x$ adalah

$f'(x)$ = ...
= ....

Titik ujung : ....

Titik stasioner: $f'(x)$ = ...

.... = ...

Titik singular: .... karena ....

sehingga diperoleh titik-titik kritis adalah ....

Turunan kedua dari $f(x) = 8\sqrt{x} - 4x$ adalah

$f''(x)$ = ...
= ....

$f'(x)$ = *0* untuk x = ...

Substitusi nilai x = ... ke $f''(x)$ = ...
= ....

berarti *f*(......) adalah nilai ....

Untuk x = ... $f(x)$ = ...

= ....

x = ... $f(x)$ = ...

= ....

x = ... $f(x)$ = ...

= ....

Jadi nilai maksimum (global) adalah .... dan nilai minimum (global) adalah ....

4.2.2 LEBIH BANYAK MASALAH MAKSIMUM DAN MINIMUM

Langkah-langkah menyelesaikan masalah maksimum dan minimum (tidak berarti semua langkah harus digunakan)

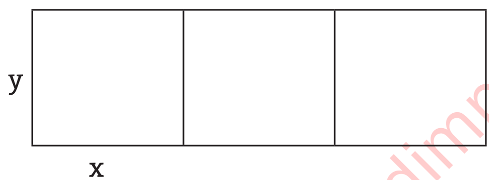
1. Buat sebuah gambar untuk masalah dan berikan variabel-variabel yang sesuai untuk besaran-besaran kunci.
2. Tuliskan rumus untuk besaran Q yang harus dimaksimumkan (diminimumkan) dalam bentuk variabel-variabel tersebut.
3. Gunakan kondisi-kondisi masalah untuk menghilangkan semua kecuali satu dari variabel-variabel ini dan karenanya menyatakan Q sebagai fungsi dari satu variabel misalnya *x*.
4. Tentukan himpunan nilai-nilai *x* yang mungkin, biasanya sebuah selang.
5. Tentukan titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, titik singular). Paling sering, kunci titik-titik kritis berupa titik stasioner dimana $\frac{dQ}{dx} = 0$.
6. Gunakan teori pada maksimum dan minimum untuk me-

mutuskan titik kritis mana yang memberikan maksimum (minimum)

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Seorang petani berkeinginan membuat tiga kandang berdampingan masing-masing seluas 700 kaki persegi seperti diperlihatkan pada gambar berikut:



Berapa x dan y sehingga kawat yang diperlukan sesedikit mungkin?

Jawab:

Langkah 2 Coba Anda ingat lagi rumus keliling persegi panjang sehingga keliling dari ketiga kandang tersebut adalah

K = ...

= ....

Langkah 3 Coba Anda ingat lagi rumus luas persegi panjang

L = ...

Dari rumus luas persegi panjang di atas diperoleh

y = ...

Substitusi nilai y ke dalam persamaan K diperoleh

K = ...

= ....

Langkah 4 Nilai x berada pada selang ....

Langkah 5

Turunan pertama dari K = ... adalah

K' = ...

Titik ujung :......................................

Titik stasioner : K' = ...

Titik singular :............ karena ....

diperoleh titik-titik kritis: ....

Untuk x = ... dan y = ...

K = ... = ...

x= .... dan y = ... K = ... = ...

x= .... dan y = ... K = ... = ...

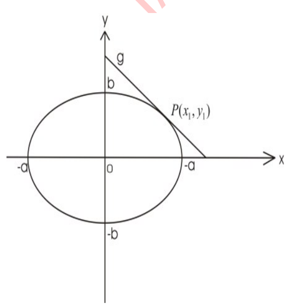
Jadi, ukuran kandang sehingga kawat yang diperlukan sedikit mungkin adalah...............

Soal 2

Cari persamaan garis yang menyinggung elips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ di kuadran pertama dan dengan sumbu-sumbu membentuk segitiga yang luasnya sekecil mungkin (a dan b konstanta positif)

Jawab

Langkah 1



Misalkan garis g menyinggung elips di titik $P(x_1,y_1)$ dengan kemiringan m dan A adalah luas segitiga yang dibentuk oleh garis singgung dengan sumbu koordinat

Langkah 2. Ingat rumus mencari luas segitiga dan hubungkan dengan gambar di atas sehingga:

A = ...

Langkah 3

Bentuk $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dapat dinyatakan dengan

$$=\sqrt{\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}=\sqrt{\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\sqrt{\dots\dots\dots}$$

Substitusi titik P ke y = ...

Sehingga $y_1 = \frac{\dots\dots}{\dots}\sqrt{\dots\dots\dots}$

Turunan pertama dari $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ terhadap x adalah

.... = ...

.... = ...

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots}$$

Kemiringan (m) = ...

sehingga m di titik $P(x_1,y_1)$ adalah

$$m=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Ganti nilai y_1 sehingga

$$m=\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ dengan kemiringan m adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\sqrt{\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}(x-x_1)$$

y = ...

=

Titik potong garis singgung g dengan sumbu x (syarat y = ...) adalah:

$$\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}x + \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots..$$

$$\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}x = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$x = \dots\dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$

Titik potong garis singgung g dengan sumbu y (syarat x = ...) adalah

y = ...

Jadi $A(x_1)$ = ...

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\sqrt{\dots\dots\dots\dots\dots}}$$

Langkah 4 $0 < x_1 < a$

Langkah 5

Kita ingin meminimumkan $A(x_1)$. Karena $A(x_1) > 0$ dan pembilangnya konstan, ini sama saja dengan memaksimumkan penyebutnya yaitu dengan memaksimumkan $f(x_1)$ = ... $0 < x_1 < a$

Turunan pertama dari $f(x_1)$ = ... adalah

$f'(x_1)$ = ...+ ....

$$= \dots\dots\dots\dots - \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots}$$

Titik ujung:...........................

Titik stasioner: $f'(x_1)$ = ...

Sehingga titik stasioner adalah ......

Titik singular: ....

Titik kritis: x_1 = ...

Langkah 6

Gunakan uji turunan pertama untuk menentukan nilai maksimum/minimum diperoleh $f(x_1)$

Jadi $f(x_1)$ .... pada x_1 = ...

y_1 = ... = ...

= .... = ... = ...

dan m = ... = ... = ...

sehingga persamaan garis singgung *g* adalah

$y - y_1 \quad = m\,(x - x_1)$

.... = ...

.... = ...

4.3

LIMIT DI KETAKHINGGAAN DAN LIMIT TAK BERHINGGA

Materi Pokok:	**4.3.1 Limit di Ketakhinggaan** **4.3.2 Limit Tak Terhingga** **4.3.3 Asimtot**
Materi Prasyarat: Limit	

Indikator Kompetensi

Mahasiswa dapat:

1. Menentukan limit di ketakhinggaan.
2. Menentukan nilai limit tak terhingga.
3. Menentukan asimtot tegak, asimtot datar dan asimtot miring dari suatu fungsi.

Limit di Ketakhinggaan

Definisi limit bila $x \to \infty$

Andaikan f terdefinisi pada $[c, \infty]$ untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Jika untuk masing-masing $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian sehingga:

$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi limit bila x → −∞

Andaikan *f* terdefinisi pada [−∞ , *c*] untuk suatu bilangan *c*. Kita katakan bahwa:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Jika untuk masing-masing $\varepsilon < 0$, terdapat suatu bilangan *M* yang berpadanan sedemikian sehingga

$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Catatan: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0$ dan $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ dengan $k \in$ bilangan bulat positif.

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$

Jawab:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan *x* pangkat tertinggi yang muncul di penyebut, yakni .... sehingga

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-2x+1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots)-\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots)+\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots\dots)-\lim\limits_{x\to-\infty}(\dots\dots\dots\dots\dots)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Soal 2

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)^{1/2}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi yang muncul di penyebut, yakni .... sehingga

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\lim\limits_{x\to\infty}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)^{1/2}$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

Soal 3

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

Jawab:

Bagi pembilang dan penyebut dengan *x* pangkat tertinggi yang muncul di penyebut, yakni *x* sehingga:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}}{\dfrac{x+4}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}} + \sqrt{\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}}{\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} + \dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots$$

Soal 4

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \dfrac{1}{x}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dfrac{1}{x}}$$

Anggap $t = \dfrac{1}{x}$

Jika $x \to \infty$ maka $t \to 0^+$

sehingga

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dots\dots\dots\dots}{t}$$

$$= \dots\dots\dots$$

Limit Tak Terhingga

Definisi limit tak terhingga

Kita katakan bahwa $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$ jika untuk tiap bilangan positif M, berpadanan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Atau $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$ jika $\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Soal Latihan Terbimbing

Soal 1

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 9}$

Jawab:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{(\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots)}$$

Karena $x \to 3^-$ maka $3x^2 \to \dots\dots\dots\dots\dots$

$x - 3 \to \dots\dots\dots\dots\dots$

$x + 3 \to \dots\dots\dots\dots\dots$

Jadi pembilang mendekati .... dan penyebut adalah .... dan mendekati ....

sehingga,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{3x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3^-} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{(\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots)}$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots$$

Soal 2

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lVert x \rVert}{x}$

Jawab:

Untuk $x \to 0^+$, $\lVert x \rVert = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\lVert x \rVert}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \lim_{x \to 0^+} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soal 3

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

Jawab:

Untuk $x \to 0^-$ berarti $x < 0$ maka $|x| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \lim_{x \to 0^-} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Asimtot

5. Garis $x = c$ adalah **asimtot vertikal (tegak)** dan grafik $y = f(x)$ jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.
   1. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$
   2. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
   3. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$
   4. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

6. Garis $y = b$ adalah **asimtot horizontal (mendatar)** dari grafik $y = f(x)$ jika

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ atau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

7. Garis y = *ax+b* adalah **asimtot miring** dari grafik y = f(x) jika

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \text{ atau } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

Soal Latihan Terbimbing

1. Tentukanlah asimtot horizontaldan asimtot vertikal dari

$$f(x)=\frac{7x}{x-3}$$

Jawab:

5. Asimtot horizontal

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi yang muncul di penyebut yakni .... sehingga

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$=\dots\dots\dots$$

Jadi asimtot horizontal adalah garis y = ...

6. Asimtot vertikal

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots$$

Karena $\lim_{x\to3^-} f(x)=\dots\dots\dots$ dan $\lim_{x\to3^+} f(x)=\dots\dots\dots$

maka *x* = ... adalah asimtot vertikal dari *f*(*x*)

2. Tentukanlah asimtot miring dari:

$$f(x)=\frac{5x^3+4x^2-x+1}{x^2+3}$$

Jawab:

Bagi pembilang dengan penyebut dari fungsi di atas sehingga

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$$

Gunakan syarat mencari asimtot miring, yaitu:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \right) - (ax + b) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) - \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \right] - \lim_{x \to \infty} (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lim_{x \to \infty} (ax + b)$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) = \lim_{x \to \infty} (ax + b)$$

$$(\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots) = (ax + b)$$

sehingga diperoleh a = ... dan b = ...

Jadi asimtot miring dari fungsi di atas adalah y = ... x + ...

3. Tentukanlah asimtot datar, asimtot tegak dan asimtot miring dari

$$f(x) = \frac{(x - 4)^2}{x}$$

Jawab:

7. Asimtot datar

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jadi asimtot datar ....

8. Asimtot tegak

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots$$

Karena $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$ dan $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

maka x = ... adalah asimtot tegak dari $f(x)$

9. Asimtot miring

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{x} = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots - \dots\dots + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots}$$

Gunakan syarat mencari asimtot miring, yaitu:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(\dots\dots\dots - \dots\dots\dots + \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} \right) - (ax+b) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (\dots\dots\dots - \dots\dots\dots) + \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} \right] - \lim_{x \to \infty} (ax+b) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (\dots\dots\dots - \dots\dots\dots) + \dots\dots\dots\dots\dots = \lim_{x \to \infty} (ax+b)$$

$$\lim_{x \to \infty} (\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) = \lim_{x \to \infty} (ax+b)$$

$$(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots) = (ax+b)$$

sehingga diperoleh a = ... dan b = ...

Jadi asimtot miring dari $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x}$ adalah y = ...x + ...

DAFTAR PUSTAKA

Assauri, Sofyan. 1979. *Matematika Ekonomi*. Jakarta: RajaGrafindo Persada.

Baisuni, M. Hasyim. 1986. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia (UI-Pres).

Bender, Edward A. 1978. *Mathematical Modelig*. New York: Dover Publication.

Bartle, Robert G. 1992. *Introduction to Real Analysis*. New York, John Willey & Son Inc.

Desmizar. 2003. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Rineka Cipta.

Iswadi, Joko dkk. 1994. *Geometri Ruang*, modul 1-9. Depdikbud., Universitas Terbuka.

Legowo. 1979. *Dasar-dasar Kalkulus dan Penerapannya pada Ekonomi*. Jakarta, RajaGrafindo Persada.

Marotto, Frederick R. 2006. *Mathematical Modeling*. United States of America: Thomson.

Martono, Koko. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.

Martono, Koko. 1985. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Jilid 1. Bandung: Angkasa.

Martono, Koko., dkk. 2004. *Matematika dan Kecakapan Hidup*. Jilid 1. Jakarta: Ganeca Exact.

__________. 2004. *Matematika dan Kecakapan Hidup*. Jilid 2. Jakarta: Ganeca Exact.

Moeharti. 1999. *Sistem-sistem Geometri. Modul 1-6*. Universitas Terbuka.

Muchtar G. 1992. *ILMU BILANGAN*. Padang: Badan Penerbit Fakultas MIPA.

Purcel, Edwin J, Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1. Edisi kelima. Terj. Drs. I Nyoman Susila, M. Sc., dkk. Jakarta: Erlangga.

__________. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1. Edisi kedelapan, Terj. Drs. I Nyoman Susila, M.Sc., dkk. Jakarta: Erlangga.

Soemartojo, N. 1999. *Kalkulus I*. Modul 1-9. Universitas Terbuka

Soemartojo, N, dkk. 1999. *Program Linier*. Jakarta, Universitas Terbuka.

Sukirman. 2006. *Pengantar Teori Bilangan*. Yokyakarta: Hanggar Kreator.

Setya Budhi, Wono. 2003. *Langkah Awal Menuju Olimpiade Matematika*. Jakarta: CV Ricardo.

Supranto, J. 1984. *Pengantar Matrix*. Jakarta: LP-FEUI.

Spigel, Murray. 2007. *Kalkulus Lanjut*. Edisi Dua. Jakarta: Erlangga.

Tim Dosen Matematika FKIP UMN, *Trigonometri*. Medan, LP-FKIP UMN, 2005.

Tim Dosen Matematika UNIMED, *Pendidikan Matematika-I*. Medan, LP-UNIMED, 2005.

Tim Dosen Matematika UNIMED, *Pendidikan matematika-II*. Medan, LP-UNIMED, 2005.

TENTANG PENULIS

Dr. Suparni, S.Si., M.Pd., dilahirkan di Securai, Pangkalan Berandan, Kabupaten Langkat, Sumatera Utara pada tanggal 08 Juli 1970. Menempuh Pendidikan formal di SD Negeri no 054937 Alurejo, Babalan, Pangkala Berandan. Melanjutkan ke jenjang Pendidikan menengah pertama SMP Negeri 1 Pangkalan Berandan dan jenjang Pendidikan menengah atas SMA Negeri 1 Pangkalan Berandan. S-1 Prodi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara-Medan (FMIPA-USU Medan), S-2 Teknologi Pendidikan Konsentrasi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Padang (UNP-Padang) dan S-3 Prodi Ilmu Matematika Sekolah Pascasarjana Universitas Sumatra Utara-Medan (USU-Medan).

Penulis saat ini bekerja sebagai dosen tetap PNS di IAIN Padangsidimpuan pada Prodi Tadris/Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan (FTIK) IAIN Padangsidimpuan.